"∇f φραγμένη στην $\Pi_\delta(P_0) \not\Longrightarrow f$ συνεχής στο P_0"

Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $f: U \to \mathbb{R}$, $P_0 \in U$. Αν σε κάποια περιοχή $\Pi_\delta(P_0) \subset U$ του σημείου P_0 υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι της f και φράσσονται, τότε η f είναι συνεχής στο P_0.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

// Έστω $(x,y,z) \in \Pi_\delta(P_0) \subset U$, όπου $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Τότε

$$|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)| \leq |f(x,y,z) - f(x_0,y,z)| + |f(x_0,y,z) - f(x_0,y_0,z)| + |f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0)| .$$

Εφαρμόζω το Θεώρημα μέσης τιμής για τις εξής συναρτήσεις μιας μεταβλητής, θεωρώντας :

- y, z σταθερά : $f(x,y,z) - f(x_0,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*,y,z) \cdot (x - x_0)$
- x_0, z σταθερά : $f(x_0,y,z) - f(x_0,y_0,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y^*,z) \cdot (y - y_0)$
- x_0, y_0 σταθερά : $f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z^*) \cdot (z - z_0)$,

για κάποιο $x^* \in (x_0,x) \cup (x,x_0)$, για κάποιο $y^* \in (y_0,y) \cup (y,y_0)$ και για κάποιο $z^* \in (z_0,z) \cup (z,z_0)$, οπότε :

$$|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y,z)\right| |x-x_0| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y^*,z)\right| |y-y_0| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z^*)\right| |z-z_0| \leq M_1 |x-x_0| + M_2 |y-y_0| + M_3 |z-z_0| \xrightarrow[(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)]{} M_1 \cdot 0 + M_2 \cdot 0 + M_3 \cdot 0 = 0$$

, άρα f συνεχής στο $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ □